ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Πρόβλημα: Από τις απλές κλειστές καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ ποια είναι εκείνη που περικλείει το μέγιστο εμβαδόν της

Θεώρημα (Jordan)
Έστω $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή κλειστή καμπύλη το $\mathbb{R}^2 \setminus c(\mathbb{R}) = D_i \cup D_e$, όπου D_i, D_e ανοικτά-συνεκτικά $\subset \mathbb{R}^2$ με $\partial D_i = \partial D_e = c(\mathbb{R})$ και το ένα από αυτά είναι φραγμένο (διότι τότε το $\mathbb{R}^2$ θα ήταν φραγμένο)

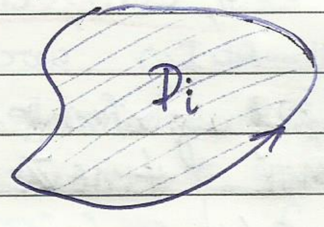
Θεώρημα
Έστω $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή κλειστή καμπύλη μήκους L και A είναι το εμβαδό του εσωτερικού του. Τότε ισχύει η ανισότητα $L^2 \geq 4\pi \cdot A$.

$\uparrow$

Ισοπεριμετρική ανισότητα

Η σχέση $L^2 = 4\pi A$ ισχύει μόνο για τους κύκλους

Απόδειξη



C απλή κλειστή με $C(t)=(x(t),y(t))$

Το Θεώρημα του Gauss-Green:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{P_i} (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

όπου $A=\iint_{P_i} dx\,dy$

Επιλέγω, λοιπόν $P(x,y)=0$ & $Q(x,y)=x$

Τότε $\oint_c x\,dy = A \Leftrightarrow \int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt = A$

ΛΗΜΜΑ

Το εμβαδόν απλής κλειστής καμπύλης $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ είναι

$$A=\int_a^b x(t)\cdot y'(t)\,dt = -\int_a^b x'(t)\,y(t)\,dt$$

(δίχως απαραίτητα παράμετρο το μήκος τόξου)

$C(a)=C(b) \Leftrightarrow x(a)=x(b)$ & $y(a)=y(b)$

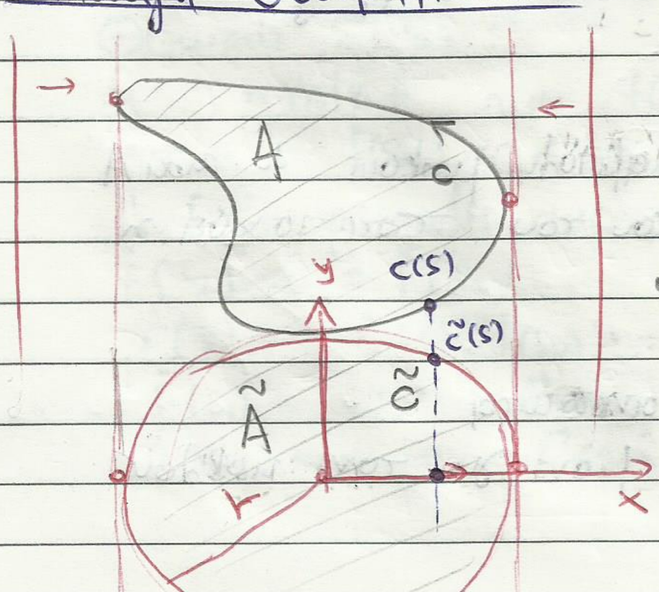
$C'(a)=C'(b) \Leftrightarrow x'(a)=x(b)$ & $y'(a)=y'(b)$

⋮

$$A=\int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt = x(t)\,y(t)\Big|_a^b - \int_a^b y(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$= x(b)\,y(b) - x(a)\,y(a) = 0$$

Απόδειξη Θεωρήματος



- Υποθέτω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Επομένως, $C(s)=(x(s),y(s))$ και επίσης $C(L+S)=C(S)$
- Παραμετρικοποιούμε τον κύκλο $\tilde c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ώστε $\tilde c(s)=(\tilde x(s),\tilde y(s))$ ώστε $\tilde x(s)=x(s)$

  $x^2(s)+\tilde y^2(s)=r^2$

  $A=\int_0^L x(s)\,\dot y(s)\,ds$ και

$$\bar{A} = \pi r^2 = -\int_0^{\ell} \tilde{y}(s)\,\dot{x}(s)\,ds$$

$$A + \pi r^2 = \int_0^{\ell} \left(x(s)\dot{y}(s) - \tilde{y}(s)\dot{x}(s) \right) ds \le \int_0^{\ell} |x(s)\dot{y}(s) - \tilde{y}(s)\dot{x}(s)|\,ds$$

$$\le \int_0^{\ell} \sqrt{x^2(s) + \tilde{y}^2(s)} \cdot \sqrt{(\dot{y}(s))^2 + (\dot{x}(s))^2} = \int_0^{\ell} r = r \cdot \ell$$

$\vec{\alpha} = (x, \tilde{y})$

$\vec{b} = (\dot{y}, -\dot{x})$

(Η ισότητα στην ανίσωση C-S ισχύει όταν $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ γραμ. εξαρτημένα)

$\vec{\alpha} = \lambda \vec{b}$ και $\vec{b} = \lambda \vec{\alpha}$

Άρα, $A + \pi r^2 \le r\ell \Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{A}\sqrt{\pi}\, r \le \sqrt{A}^2 + (\sqrt{\pi} r)^2 = A + \pi r^2 \le \ldots \le r\ell}$

$\Rightarrow 2\sqrt{A}\sqrt{\pi}\,\cancel{r} \le \cancel{r}\ell \Rightarrow 4A\pi \le \ell^2 \Rightarrow \boxed{\ell^2 \ge 4A\pi}$

Ταυτότητα (Lagrange)

$$(a_1 a_2 + \beta_1 \beta_2)^2 + (a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Αντίστροφα,

$\ell^2 = 4\pi A$ με αντίστροφους συλλογισμούς έχουμε ισότητα αντί για ανισότητες $\Rightarrow$ ισότητα σε όλα τα βήματα

$$x\dot{y} - \tilde{y}\cdot\dot{x} = |x\dot{y} - \tilde{y}\dot{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}$$

Τότε $x\dot{x} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}} = 0 \Rightarrow \dfrac{\dot{x}}{\tilde{y}} = -\dfrac{\dot{y}}{x} = \mu \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \mu \tilde{y} \\ \dot{y} = -\mu x \end{cases}$

Έτσι,

$x\dot{y} - \tilde{y}\cdot\dot{x} = -\mu x^2 - \mu \tilde{y}^2 = |-\mu x^2 - \mu \tilde{y}^2| = r \Leftrightarrow -\mu(x^2 + \tilde{y}^2) = r \Leftrightarrow$

$\mu = \dfrac{1}{r}$ Έτσι, $\underbrace{\dot{x} = -\dfrac{1}{r}\tilde{y}}$ & $\underbrace{\dot{y} = \dfrac{1}{r} x}$

Μοναδιαίο εφαπτόμενο της c: $\vec{t} = (\dot{x}, \dot{y})$.

Μοναδιαίο κάθετο της $\tilde{c}$: $\vec{\tilde{n}} = \dfrac{1}{r}(x, \tilde{y})$

$\vec{\tilde{n}} = J\vec{\tilde{t}} \Rightarrow \vec{\tilde{t}} = -J\,\vec{\tilde{n}} = \dfrac{1}{r}(-\tilde{y}, x)$

Συμπεραίνω

$$\vec{\tilde{t}} = \left(\frac{1}{r}\tilde{y}, -\frac{1}{r}x\right)$$

Αν $\tilde{s}$ = μήκος τόξου του $\tilde{c}$ $\vec{\tilde{t}} = \left(\dfrac{d\tilde{x}}{ds}, \dfrac{d\tilde{y}}{ds}\right) = \left(\dfrac{dx}{d\tilde{s}}, \dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{s}}\right)$

$$\frac{dx}{d\tilde{s}} = \frac{1}{r}\tilde{y} \Leftrightarrow \frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r}\tilde{y} \Leftrightarrow \frac{ds}{d\tilde{s}}\dot{x} = \frac{1}{r}\tilde{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds = -d\tilde{s} \Leftrightarrow s = -\mathring{s}$$

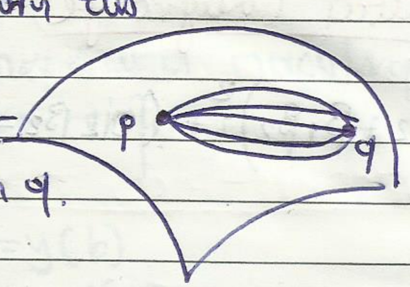
$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = -\frac{1}{r}x \Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{ds} = \frac{1}{r}x$$

$$s=\tilde{s},\quad x=\tilde{x},\quad \frac{dy}{ds} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{s}} \longrightarrow \tilde{y} = y + \text{σταθ}$$

Άρα, $\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = r^2 \Leftrightarrow x^2(s) + (y(s)-a)^2 = r$

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης μήκους σε επιφάνεια

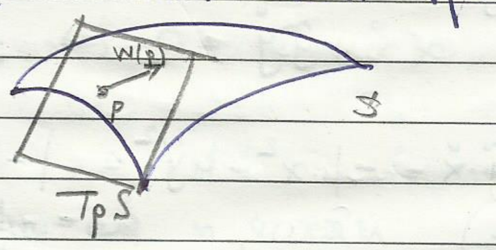
Δίνεται κανονική S επιφάνεια και σημεία της p, q. Να βρεθεί αν υπάρχει καμπύλη της S με άκρα p και q η οποία να έχει μήκος $\leq$ μήκος κάθε καμπύλης της S με άκρα p και q.



Διανυσματικά πεδία σε επιφάνειες

Ορισμός

Ένα διανυσματικό πεδίο W της S είναι μία λεία απεικόνιση από την $S \to \mathbb{R}^3$ $(W: S \to \mathbb{R}^3)$ ώστε $\forall p \in S$ $W(p) \in T_p(S)$



Έστω $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$

σύστημα συντεταγμένων της S

$W \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$W \circ X(u,v) = W(X(u,v)) = a(u,v)X_u(u,v) + b(u,v)X_v(u,v)$.

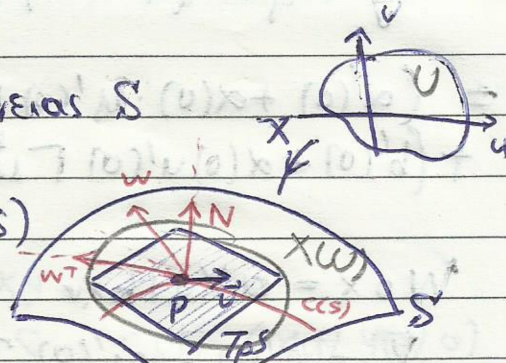
$\mathbb{R}^2$, $W: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $W = (f,g)$, $p \in \mathbb{R}^2$ & $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$D_{\vec{v}}W(p) = (D_{\vec{v}}f(p), D_{\vec{v}}g(p))$$

$$D_{\vec{v}}f(p) = \lim_{t\to 0}\frac{f(p+t\vec{v}) - f(p)}{t} = \langle \vec{v}, \text{grad} f(p) \rangle$$

Συναλλοίωτη Παράγωγος:

Ορισμός: Έστω W: δ.π. κανονικής επιφάνειας S. Καλούμε συναλλοίωτη του W στην διεύθυνση που ανήκει στο T_pS ($\vec{v}\in T_pS$) στο σημείο p το διάνυσμα



$D_{\vec{v}} W(p) \in T_pS$ και που ορίζεται ως εξής:

$\exists$ c τέτοιο ώστε $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow S$ με $c(0)=p$ & $c'(0)=\vec{v}$

$D_{\vec{v}} W(p) = (W\circ c)'(0)$ εφαπτομενική συνιστώσα του T_pS.

Αν $w\in T_p(\mathbb{R}^3) \Rightarrow w = w_T + \langle w, N(p)\rangle N(p)$ το εφαπτομενικό διάνυσμα στο w

Έτσι, $D_{\vec{v}} W(p) = (W\circ c)'(0) - \langle (W\circ c)'(0), N(p)\rangle N(p)$

$c(t) = X(u(t), v(t))$ $\quad W\circ X = a X_u + b X_v$

$W\circ c(t) = W(c(t)) = W(X(t), v(t)) =$

$= W\circ X(u(t), v(t)) = a(u(t), v(t)) X_u(u(t), v(t)) +$

$+ b(u(t), v(t))\cdot X_v(u(t), v(t)) =$

$= a(t)\, X_u(u(t), v(t)) + b(t)\, X_v(u(t), v(t))$.

$c(0)=p$, $\vec{v} = c'(0) = u'(0) X_u + v'(0) X_v$

$(W\circ c)'(0) = a'(0) X_u(u(0), v(0)) + b'(0) X_v(u(0), v(0)) +$

$+ a(0)\{u'(0) X_{uu}(\ldots) + v'(0)\cdot X_{uv}\} + b(0)\{u'(0) X_{vu} + v'(0) X_{vv}\}$.

$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$

$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN$

$X_{vu} =$

$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN$

$D_{\vec v} W(p) = ((W\circ c)'(0))^T =$

$= (\alpha'(0) + \alpha(0)\cdot u'(0)\Gamma_{11}^1 + a(0)v'(0)\Gamma_{12}^1 + b(0)u'(0)\Gamma_{12}^1 + b(0)v'(0)\Gamma_{12}^1)X_u +$
$+ (b'(0) + \alpha(0)u'(0)\Gamma_{11}^2 + a(0)v'(0)\Gamma_{12}^2 + b(0)u'(0)\Gamma_{12}^2 + b(0)\cdot v'(0)\Gamma_{22}^2)X_v$

$W\circ X = aX_u + bX_v$

$\vec v = c'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$

Παρατήρηση (sos)

Η συναλλοίωτη παράγωγος εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή και είναι καλά ορισμένη (ανεξάρτητη της επιλογής της καμπύλης c με $c(0)=p$, $c'(0)=\vec v$)

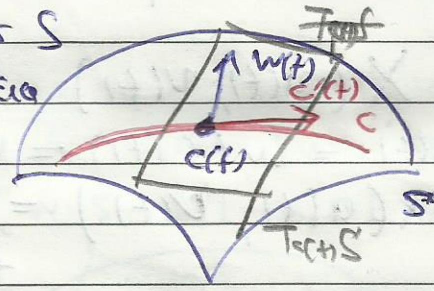
Διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπύλης και συναλλοίωτη παράγωγος αυτών

Ορισμός:

Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to S$ καμπύλη κανονικής επιφάνειας S. Καλούμε διανυσματικό πεδίο της S κατά μήκος της c κάθε λεία απεικόνιση $W: I\to\mathbb{R}^3$

$t \mapsto W(t)$, ώστε $\forall t\in I$

$W(t)\in T_{c(t)}S$



$f: I\to\mathbb{R}$

Παρατήρηση: Αν V, W δ.π κατά μήκος της c τότε fV, $V+W$ είναι επίσης

$(fV)(t)=f(t)V(t)$

$(V+W)(t)=V(t)+W(t)$

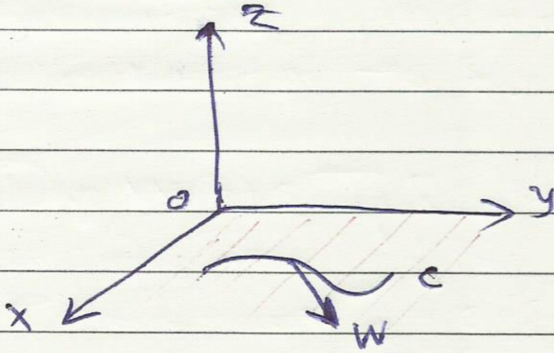
Πχ (sos)

το διαν. πεδίο ταχύτητας της c, c'

Ορισμός: Συναλλοίωτη παράγωγος του w κατά μήκος της c είναι το διαν. πεδίο που ορίζεται:

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \left(\frac{dw}{dt}(t)\right)^T = \frac{dw}{dt}(t) - \langle \frac{dw}{dt}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t))$$

Παράδειγμα



$S = Oxy$

$c : I \to S \quad c(t) = (x(t), y(t), 0)$

$w(t) = (w_1(t), w_2(t), 0)$

Συναλλοίωτη παράγωγος:

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt} - \langle \frac{dw}{dt}, N \rangle N =$$

$$= \left(\frac{dw_1}{dt}, \frac{dw_2}{dt}, 0\right) - \cancelto{0}{\langle \left(\frac{dw_1}{dt}, \frac{dw_2}{dt}, 0\right), (0,0,1) \rangle} (0,0,1) =$$

$$= \frac{dw}{dt}$$

Οι έννοια της παραγώγου και της συναλλοίωσης συμπίπτει όταν έχουμε ως επιφάνεια επίπεδο

~~Η σταθερότητα~~

Ορισμός

Το διανυσματικό πεδίο w κατά μήκος της καμπύλης c της S λέγεται παράλληλο κατά μήκος της c $\Leftrightarrow \frac{dw}{dt} = 0$

Έστω ότι $w = c' \to \frac{Dc'}{dt} = \frac{dc'}{dt} = c''$

c' παράλληλο $\Leftrightarrow \frac{Dc'}{dt} = 0 \Leftrightarrow c''(t) = 0 \ \forall t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c(t) = t\vec{\alpha} + p_0$

Ορισμός

Μια καμπύλη $c : I \subseteq \mathbb{R} \to S$ καλείται γεωδαισιακή της S αν-ν το c' είναι παράλληλο $\Leftrightarrow \frac{Dc'}{dt} = 0$